TD 6 : NOTION DE DÉFORMATIONS

But : mesure des termes de la matrice des déformations

Exercice 1 : Méthode des grilles :

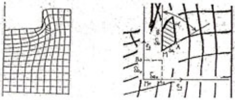


FIG. 1 – Déformation de la grille

On mesure les déformations d'un lopin d'acier après une opération de filage par la méthode des grilles. La configuration déformée de l'éprouvette est représentée figure 1. On rappelle que l'on définit la matrice des déformations par :

$$\frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{U_0}.\overrightarrow{V_0}-\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}}{||\overrightarrow{U_0}||.||\overrightarrow{V_0}||}=\frac{\overrightarrow{U_0}.\varepsilon.\overrightarrow{V_0}}{||\overrightarrow{U_0}||.||\overrightarrow{V_0}||} \tag{1}$$

avec $\overrightarrow{U_0}$ et $\overrightarrow{V_0}$ deux vecteurs quelconques qui deviennent $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ après déformation.

1. A partir des mesures de longueurs et d'angles ($\alpha = \frac{\pi}{3}$), calculer les composantes de l'opérateur des déformations ε, relatif au point M_0 dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
   On pourra démontrer que l'on a :

$$\epsilon_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{MA^2}{M_0A_0^2}-1\right). \tag{2}$$

$$\epsilon_{22}=\frac{1}{2}\left(\frac{MB^2}{M_0B_0^2}-1\right) \tag{3}$$

$$\epsilon_{12}=\frac{cos(\alpha)}{2}\frac{MA}{M_0A_0}\frac{MB}{M_0B_0} \tag{4}$$

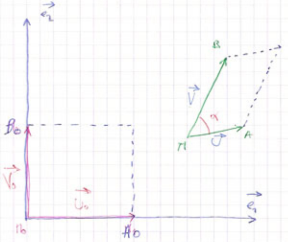
2. En négligeant les termes de second ordre, démontrer :

$$\epsilon_{11}=\frac{MA-M_0A_0}{M_0A_0}=\frac{\Delta L_1}{L_1} \tag{5}$$

$$\epsilon_{22}=\frac{MB-M_0B_0}{M_0B_0}=\frac{\Delta L_2}{L_2} \tag{6}$$

$$\epsilon_{12}=\frac{\gamma}{2} \tag{7}$$

avec $\frac{\Delta L_1}{L_1}$ l'allongement unitaire suivant $\overrightarrow{e_1}$, $\frac{\Delta L_2}{L_2}$ suivant $\overrightarrow{e_2}$ et $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$.



on définit la déformation pour la variation :

$$\frac{1}{2}\,\frac{\vec{U_0}\cdot\vec{V_0} - \vec{U}\cdot\vec{V}}{\|\vec{U_0}\|\,\|\vec{V_0}\|} = \frac{\vec{U_0}\cdot\mathcal{E}\cdot\vec{V_0}}{\|\vec{U_0}\|\,\|\vec{V_0}\|}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{MA^2}{M_0A_0^2} - 1\right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{MB^2}{M_0B_0^2} - 1\right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\cos\alpha}{2}\;\frac{MA\,.\,MB}{M_0A_0\,M_0B_0}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\cos\alpha}{2}\;\frac{MA\,.\,MB}{M_0A_0\;M_0B_0}$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix}$$

ex : on prend $\vec{U_0} = M_0A_0\,\vec{e_1}$

$\vec{V_0} = M_0A_0\,\vec{e_1}$

$\vec{U_0}\cdot\vec{V_0} = M_0A_0^2 \qquad \|\vec{U_0}\| = M_0A_0$

$\vec{U}\,\vec{V} = MA^2 \qquad \|\vec{V_0}\| = M_0A_0$

$$\mathcal{E}\vec{V_0} = \begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} M_0A_0 = \begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{12}\end{pmatrix}\vec{M_0A_0}$$

$$\underbrace{M_0A_0\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}}_{\vec{V_0}^{\,T}}\;\underbrace{\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{12}\end{pmatrix} M_0A_0}_{\mathcal{E}\vec{V_0}}$$

$$= M_0A_0^2\,\varepsilon_{11}$$

Définition des déformations

(a) $$\boxed{\frac{1}{2}\,\frac{\vec{U}\cdot\vec{V}-\vec{U_0}\cdot\vec{V_0}}{\|\vec{U}\|\,\|\vec{V_0}\|}=\frac{\vec{U_0}\cdot\mathcal{E}\,\vec{V_0}}{\|\vec{U_0}\|\,\|\vec{V_0}\|}}$$

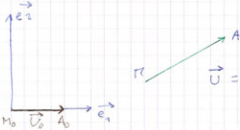
$\forall\,(\vec{U_0},\vec{V_0})$ qui se transforme après déformation en $(\vec{U},\vec{V})$

Cas particulier de vecteurs $\vec{U_0}$ $\vec{V_0}$

Exemple :

$\vec{U_0}=\vec{V_0}=\overrightarrow{M_0A_0}=M_0A_0\,\vec{e_1}$

$$\mathcal{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix}$$



$\vec{U}=\vec{V}=\overrightarrow{MA}$

$$\mathcal{E}\,\vec{V_0}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_0A_0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=M_0A_0\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{12}\end{pmatrix}$$

$$\vec{U_0}\cdot(\mathcal{E}\,\vec{V_0})=M_0A_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot M_0A_0\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{12}\end{pmatrix}$$

$$=M_0A_0^2\,\varepsilon_{11}$$

$\|\vec{V_0}\| = M_0A_0$

$\|\vec{V_0}\| = M_0A_0$

$\vec{U_0}\cdot\vec{V_1} = \begin{pmatrix} M_0A_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_0A_1 \\ 0 \end{pmatrix} = M_0A_0^2$

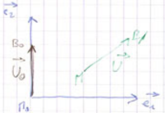
$\vec{U}\cdot\vec{V} = MA^2$

on reporte dans (1)

$$\frac{1}{2}\,\frac{MA^2 - M_0A_0^2}{M_0A_0^2} = \frac{M_0A_0^2\,\varepsilon_{11}}{M_0A_0^2}$$

donc $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{MA^2}{M_0A_0^2} - 1\right)$

on prend maintenant $\vec{U_0} = \vec{V_0} = M_0B_0\,\vec{e_2}$



$$\varepsilon\vec{V_0} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} M_0B_0$$

$$= M_0B_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

$$\vec{U_0}\cdot\varepsilon\vec{V_0} = M_0B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{pmatrix} M_0B_0$$

$$= M_0B_0^2\,\varepsilon_{22}$$

On reporte dans (1)

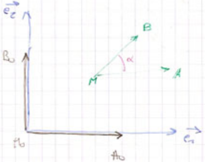
$$\frac{M_0B_0^2\,\varepsilon_{22}}{\underbrace{M_0B_0}_{\|\vec{U_0}\|}\cdot\underbrace{M_0B_0}_{\|\vec{V_0}\|}} = \frac{1}{2}\,\frac{MB^2 - M_0B_0^2}{M_0B_0^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{MB^2}{M_0B_0^2} - 1\right)$$

On prend maintenant

$\vec{U_0} = M_0A_0\,\vec{e_1}$

$\vec{V_0} = M_0B_0\,\vec{e_2}$



$$\vec{U_0} \cdot \varepsilon\vec{V_0} = M_0A_0 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{22}\end{pmatrix} M_0B_0$$

$$= M_0B_0 \begin{pmatrix}\varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{22}\end{pmatrix}$$

$$\vec{U_0} \cdot \varepsilon\vec{V_0} = M_0A_0 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{22}\end{pmatrix} M_0B_0$$

$$= M_0A_0\; M_0B_0\; \varepsilon_{12}$$

$\vec{U_0} \cdot \vec{V_0} = 0$

$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\| \cos\alpha$

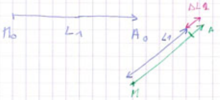
$= MA\, MB \cos\alpha$

on reporte dans (1)

$$\frac{\varepsilon_{12}\; M_0A_0\; M_0B_0}{M_0A_0\; M_0B_0} = \frac{1}{2}\,\frac{MA\, MB \cos\alpha}{M_0A_0\, M_0B_0}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{MA \; MB \cos\alpha}{M_0A_0 \; M_0B_0}$$

2) On se place en petite déformations.



$$M_0A_0 = L_1$$

$$MA = L_1 + \Delta L_1$$

avec $\frac{\Delta L_1}{L_1} \ll 1$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{MA^2}{M_0A_0^2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(L_1+\Delta L_1)^2}{L_1^2} - 1\right)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2 + 2L_1\Delta L_1 + \Delta L_1^2}{L_1^2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 2\frac{\Delta L_1}{L_1} + \underbrace{\frac{\Delta L_1^2}{L_1^2}}_{\text{négligé}} - 1\right)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta L_1}{L_1}$$

de même $M_0B_0 = L_2$

$MB = L_2 + \Delta L_2$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\Delta L_2}{L_2}$$

Pour ε_{12}

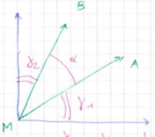
remplacement

$$\varepsilon_{12} = \frac{\cos\alpha}{2}\left(\frac{(L_1+\Delta L_1)(L_2+\Delta L_2)}{L_1 L_2}\right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\cos\alpha}{2}\left(\frac{L_1L_2 + L_2\Delta L_1 + L_1\Delta L_2 + \Delta L_1\Delta L_2}{L_1L_2}\right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\cos\alpha}{2}\Big(\underbrace{1}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{\frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2}}_{\text{ordre 1 négligé}} + \underbrace{\frac{\Delta L_1 \Delta L_2}{L_1 L_2}}_{\text{ordre 2 négligé}}\Big).$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\cos\alpha}{2}$$



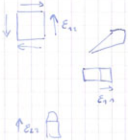
$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

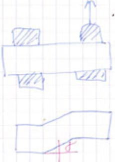
$$\varepsilon_{12} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{2} = \frac{\sin\gamma}{2}$$

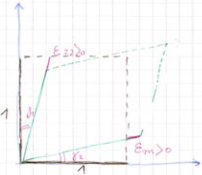
γ très petit $= \sin\gamma \simeq \gamma$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\gamma}{2}$$

rappel







$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

3. Représenter sur le graphique ci-dessous les trois termes de la matrice des déformations.

On a $M_0A_0 = M_0B_0 = 1$.

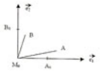


FIG. 2 – Graphe à compléter

Exercice 2 : Mesure à l'aide de rosettes à 45 degrés :

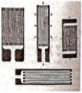


FIG. 3 – Exemples de jauge

La figure ci-dessus montre quelques exemples de jauge. Elle est toujours constituée d'une grille, fil métallique très fin de longueur L replié en multiple lacets, équipée à ses extrémités de pattes de connexion. La résistance de ce fil conducteur est donnée par $R = \rho \frac{L}{S}$

Lorsque la pièce se déforme, le fil est soumis au même allongement unitaire que la pièce dans la direction de la jauge. Cet allongement peut être atteint en mesurant la variation de résistance du fil à l'aide d'un pont de Wheastone. En effet, on peut montrer la relation suivante : $\frac{\Delta R}{R} = K\frac{\Delta L}{L}$.

On veut montrer que l'association de trois jauges peut nous permettre de trouver les trois termes de la matrice des déformations (figure ci-dessous).

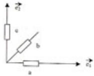


FIG. 4 – Rosette à 45 degrés

On note les trois jauges a, b et c, et respectivement leur allogement unitaire ϵ_a, ϵ_b et ϵ_c.

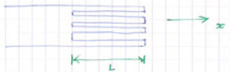
Après avoir remarqué que l'allongement suivant une direction $\vec{n_0}$, noté $\frac{\Delta L}{L}(\vec{n_0})$, vaut $\frac{\vec{n_0}.\varepsilon.\vec{n_0}}{||\vec{n_0}||^2}$ en petite déformation, exprimer ϵ_a, ϵ_b et ϵ_c en fonction de ε.

Trouver une relation simple entre ϵ_a et ϵ_{11}, et entre ϵ_c et ϵ_{22}, ainsi qu'entre ϵ_b, ϵ_{11}, ϵ_{22} et ϵ_{12}.

En déduire les termes de ε en fonction des informations des trois jauges.

II Rosettes

Jauges de déformation



$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ $\qquad \frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta L}{L}$

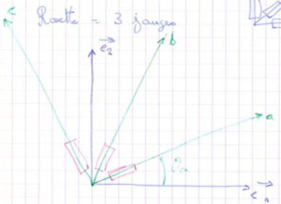
facteur de Jauge

Pb : 1 jauge mesure ε_{ii} mais pas ε_{ij}, $i \neq j$

on veut mesurer

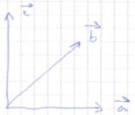
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

Rosette = 3 jauges



$$\frac{\Delta L}{L_0}(\vec{n}) = \frac{\vec{n} \cdot \varepsilon \, \vec{n}}{L_0^2}$$

Cas particulier : rosette collée avec $\theta_a = 0$



$$\varepsilon_a = \frac{\Delta L}{L_0} (\vec{a})$$

$$\vec{a} = \vec{e_1} \longrightarrow L_0 = 1$$

$$\frac{\vec{e_1} \cdot \varepsilon \vec{e_1}}{1^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta L}{L_0} (\vec{e_2})$$

$$\vec{c} = \vec{e_2}, L_0 = 1$$

$$\vec{e_2} \cdot \varepsilon \vec{e_2} = \varepsilon_{22}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_{22}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\Delta L}{L_0} (\vec{b})$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \cdot \varepsilon \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \varepsilon_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon_{22} \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \varepsilon_{12}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \varepsilon_{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_a \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_c \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \end{cases}$$

Exercice 3 : Construction du cercle de Mohr :

But : savoir tracer un cercle de Mohr et savoir l'utiliser.

On se place dans le cas de l'élasticité plane, de plan $(M, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, tel que $\vec{e_3}$ soit une direction principale.

On a en tout point : $\sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

1. Mise en place de l'équation du cercle de Mohr.

   (a) Calculer le vecteur contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$, en M sur une facette de normale $\vec{n} = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$. On note $\vec{t} = \begin{bmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Écrire ce vecteur dans la base $(M, \vec{n}, \vec{t}, \vec{e_3})$.

   (b) En déduire la contrainte normale σ_n et la contrainte tangentielle τ.

   (c) En déduire les directions principales. θ_1 correspondra à la première direction principale et θ_2 à la deuxième.

   (d) Sachant que $1 + (cotan(a)^2) = 1/(sin(a)^2)$ et $1 + (tan(a)^2) = 1/(cos(a)^2)$, on montre qu'on a avec $4R^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2$:
   $sin(2\theta_1)^2 = \left(\frac{\sigma_{12}}{R}\right)^2$ et $cos(2\theta_1)^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2R}\right)^2$
   Démontrer les expressions suivantes :
   $\sigma_n = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + Rcos(2(\theta_1 - \theta))$ et $\tau = Rsin(2(\theta_1 - \theta))$.

   (e) Démontrer que l'on a $(\sigma_n - (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2)^2 + \tau^2 = R^2$.
   Que représente cette équation dans un graphe (σ_n, τ) ?
   Tracer $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans ce graphe.

   (f) Comment peut-on trouver les contraintes principales àl'aide de ce graphe.
   Trouver une relation entre les deux contraintes principales σ_1 et σ_2, et R.

2. Application : retrouver de manière géométrique les contraintes principales en ne connaissant que la matrice des contraintes.
   Le but n'est pas de refaire ce que l'on vient de faire, mais de tracer le plus rapidement possible le cercle de Mohr sachant, désormais, qu'il existe.
   On a : $\sigma_{11} = 100$, $\sigma_{22} = -20$ et $\sigma_{12} = 60$.

   (a) Dans le graphe (σ_n, τ) d'origine O, tracer le point A_1 et A_2.
   On définit le point A_1 par $\overrightarrow{OA_1} = \vec{C}(M, \vec{e_1})$ et le point A_2 par $\overrightarrow{OA_2} = \vec{C}(M, \vec{e_2})$.

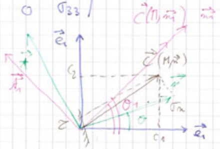
   (b) Tracer le cercle de diamètre A_1A_2.
   Déterminer les coordonnées de I le centre du cercle et la valeur de R.
   En déduire les valeurs des contraintes principales σ_1 et σ_2.

   (c) Déterminer $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$, les deux directions principales.

Exercice 3 : Construction du cercle de Mohr.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{C}(M,\vec{n}) = \sigma . \vec{n}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\cos\theta & \sigma_{12}\sin\theta & 0 \\ \sigma_{12}\cos\theta & \sigma_{22}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11}\cos\theta & \sigma_{12}\sin\theta \\ \sigma_{12}\cos\theta & \sigma_{22}\sin\theta \\ & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})} \begin{matrix} \leftarrow C_1 \\ \Leftarrow C_2 \\ \end{matrix}$$

σ_n = projection de $\vec{C}(M,\vec{n})$ sur $\vec{n}$

changement de repère en fonction de n et T.

$$\sigma_n = \vec{C}(M,\vec{n}) . \vec{n}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11}\cos\theta + \sigma_{12}\sin\theta \\ \sigma_{12}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_{11}\cos^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta$$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

$$= \sigma_{11} \cos^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \sin 2\theta \qquad \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\boxed{\sigma_{nn} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta}$$

(1)

$$\tau = \vec{C}(M,\vec{n}) \cdot \vec{t}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11}\cos\theta + \sigma_{12}\sin\theta \\ \sigma_{12}\sin\theta + \sigma_{22}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= -\sigma_{11}\cos\theta\sin\theta - \sigma_{12}\sin^2\theta + \sigma_{12}\cos^2\theta + \sigma_{22}\cos\theta\sin\theta$$

$$\tau = \sigma_{12}\cos 2\theta - \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\sin 2\theta$$

(1) et (2) sont valables pour tout θ

pour la direction principale θ_1 on a $\tau = 0$

donc $\sigma_{12}\cos 2\theta_1 - \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\sin 2\theta_1$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}} \qquad \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\tau = \sigma_{12}\cos 2\theta - \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\sin 2\theta}$$

(2)

On pose $4R^2 = (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2$

$$1 = \left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{R}\right)^2$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta_1} = 1 + \cot g^2\, 2\theta_1 = 1 + \frac{1}{\tan^2 2\theta_1}$$

$$\frac{1}{\sin^2 2\theta_1} = 1 + \frac{1}{tg^2 2\theta_1}$$

$$= 1 + \frac{1}{\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}\right)^2}$$

$$= 1 + \frac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}{4\sigma_{12}^2} = \frac{\overbrace{4\sigma_{12}^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}^{4R^2}}{4\sigma_{12}^2}$$

donc $(\sin 2\theta_1)^2 = \left(\frac{\sigma_{12}}{R}\right)^2$ et $(\cos 2\theta_1)^2 = \left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{R}\right)^2$

$$\boxed{1 + tg^2 2\theta_1 = \frac{1}{\cos^2 2\theta_1}}$$ Relation

$$\frac{1}{\cos^2 2\theta_1} = 1 + \left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}\right)^2 = \frac{\overbrace{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}^{4R^2}}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}$$

$$\cos^2 2\theta_1 = \frac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}{4R^2} = \left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2R}\right)^2$$

$$\begin{cases} \sigma_{12} = R\sin 2\theta_1 \\ \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} = R\cos 2\theta_1 \end{cases}$$

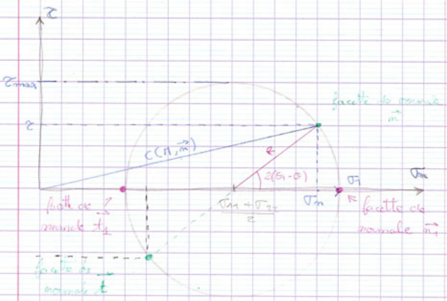
on reporte dans (1) et (2)

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + R\cos 2\theta_1 \cos 2\theta + R\sin 2\theta_1 \sin 2\theta \\ \tau = R\sin 2\theta_1 \cos 2\theta - R\cos 2\theta_1 \sin 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + R\cos(2\theta_1 - 2\theta) \\ \tau = R\sin(2\theta_1 - 2\theta) \end{cases}$$

donc

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau^2 = R^2\left(\cos^2+\sin^2\right)$$
$$= R^2$$



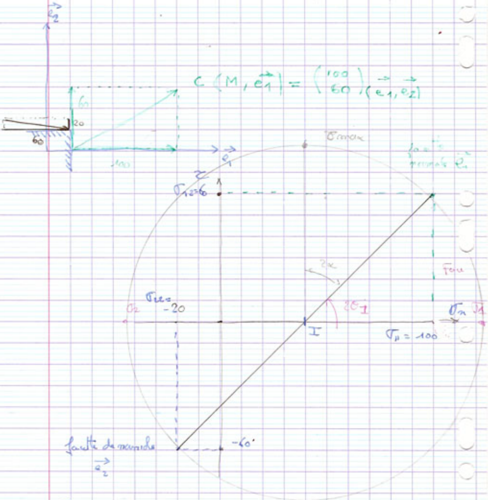
cercle de centre $\left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{12}}{2}, 0\right)$ et de rayon $R=$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

Relation :

$$R = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \tau_{max}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 60 \\ 60 & -20 \end{pmatrix}$$



$\sigma_1 = 120$

$\sigma_2 = -40 \qquad \theta_1 = +23°$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$\sigma_2 =$ " — "

$$tg\, 2\theta_1 = \frac{\sigma_{12}}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}$$