* Notions de loi de comportement

généralisation de $\sigma = E\varepsilon$ E module d'Young

$\tau = G\gamma$ G module de cisaillement

Loi reliant la matrice des contraintes et la matrice des déformation.

Cette loi, pour un milieu isotrope, possède tjs 2 coefficients

(E et ν coefficient de poisson)
nu

↑ variation de section ↑

II Partie Théorème Energétiques

Ces théorèmes permettent de calculer les contraintes dans n'importe quelle structures.

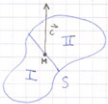
- théorème de Maxwell - Betti
- théorème de Castigliano
- théorème de Ménabrea

⇒ Application aux éléments finis (Méthode des éléments finis MEF
FEM)

Partie I

Chapitre I : Notions de contraintes

On met en place une grandeur caractérisant la cohésion de la matière.



Sur une structure, on définit une surface S délimitant celle-ci en de parties I et II.
^ la structure

La cohésion entre ces deux parties conduits à introduire un effort $\vec{C}$ en tout point M de la structure.

$\vec{C}$ est appelé vecteur contrainte, il a une direction et une intensité, et la dimension de ce vecteur est le Mpa. (N/mm^2)

On cherche les effets appliqués aux 3 surfaces.

- Surface "AB" $\vec{C}(M,-\vec{y})$ en Mpa.

$\Rightarrow$ $\vec{C}(M,-\vec{y})$ x aire de la surface "AB" $\Rightarrow \vec{C}(M,-\vec{y}) \times$ sign

$= \vec{C}(M,-\vec{y}) \times S_y$ (N)

- Surface "AC" $\vec{C}(M,-\vec{x}) \times S_x$
- Surface "BC" $\vec{C}(M,\vec{n}) \times S$ $(S = \text{"BC"})$

tout en N.

Le PFS dit que la Résultante des effets est à cet élément de volume est nulle.

$$\boxed{\vec{C}(M,\vec{n})\,S + \vec{C}(M,-\vec{x})\,S_x + \vec{C}(M,-\vec{y})\,S_y = \vec{0}}$$

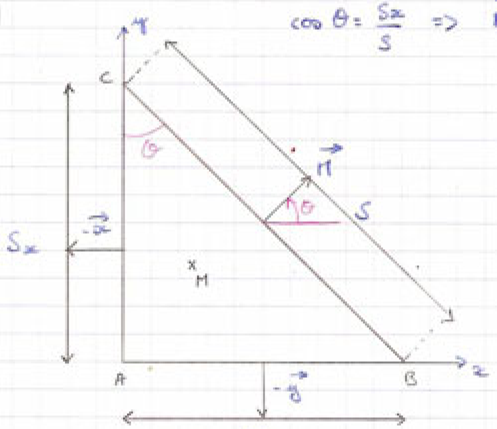
avec la propriété on a :

2) $\vec{C}(M,-\vec{n}) = -\vec{C}(M,\vec{n})$

$\Rightarrow$ $\vec{C}(M,\vec{n})\,S - \vec{C}(M,\vec{x})\,S_x - \vec{C}(M,\vec{y})\,S_y = \vec{0}$

$\vec{C}(M,\vec{n}) = \vec{C}(M,\vec{x})\,\dfrac{S_x}{S} + \vec{C}(M,\vec{y})\,\dfrac{S_y}{S} = \vec{0}$

or $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{S_x}{S} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{S_x}{S} = n_x \\ \dfrac{S_y}{S} = n_y \end{pmatrix}$



$\vec{C}(M,\vec{n}) = \vec{C}(M,\vec{x})\,n_x + \vec{C}(M,\vec{y})\,n_y$

$\vec{C}$ dépend linéairement de $\vec{n}$

$\vec{C}$ dépend linéairement

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} n_x \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} n_y = \begin{pmatrix} a_1 n_x + a_2 n_y \\ b_1 n_x + b_2 a_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

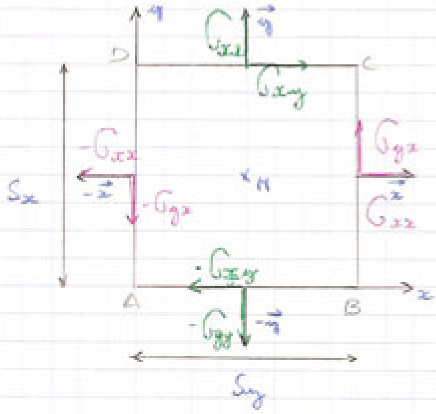
$C(M, \vec{n}) = \sigma(M)\,\vec{n}$ où σ est une matrice (2×2)

matrice de M

Matrice de contrainte.

3) Moment résultant des effort.

On choisit maintenant une plaque rectangulaire (infiniment petit autour du point M.)



Sur AB : $\vec{C}(M; -\vec{y}) \times S_y = -(\sigma(M)\vec{y})\, S_y$

Sur CD : $\vec{C}(M; \vec{y}) \times S_y = (\sigma(M)\vec{y})\, S_y$

Sur BC : $\vec{C}(M, \vec{x}) \times S_x = (\sigma(M)\vec{x})\, S_x$

Sur DA : $\vec{C}(M, -\vec{x}) \times S_x = -(\sigma(M)\vec{x}) \times S_x$

On note

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\sigma\vec{x} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\sigma\vec{y} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix}}$$

Le moment résultant en M de ces effets, qui doit être nul, implique :

$\Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ σ est une matrice symétrique.

Il existe une quatrième propriété sur σ qui conduit aux équations d'équilibre : Ce sont des équations aux dérivées partielles reliant les 6 termes de la matrice des contraintes (A voir en Licence).

Conclusion : Dans le cas tridimensionnel (3D) la matrice des contraintes s'écrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$ avec $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$; $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$.

σ_{xx} : correspond à de la traction compression sur une face orientée par $\vec{x}$

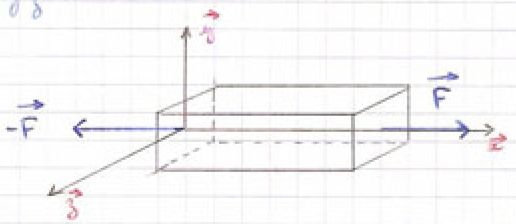
σ_{yy} : ——————————————————— $\vec{y}$

σ_{zz} : ——————————————————— $\vec{z}$

σ_{xy} : correspond à du cisaillement dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$

σ_{xz} : ——————————————— $(\vec{x}, \vec{z})$

σ_{yz} : ——————————————— $(\vec{y}, \vec{z})$



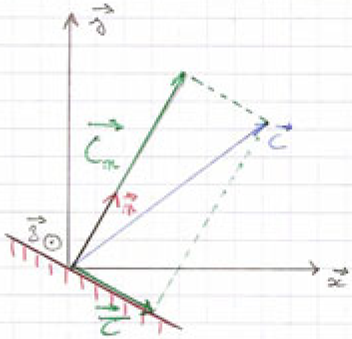
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} \frac{F_x}{S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où S est l'aire de la section

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{F_x}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrice des contraintes en traction (ou compression) suivant $\vec{x}$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matrice des contraintes en pression hydrostatique p.

IV. Étude de la contribution en traction en cisaillement sur une face orientée par $\vec{n}$, où $\vec{n}$ est quelconque.



Sur une surface orientée par $\vec{n}$, le vecteur contrainte

$$\vec{C} = \sigma \vec{n}$$

$$C_n = \vec{C} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{C_n} = C_n \vec{n}$$ traction compression.

Pour obtenir la contribution au cisaillement $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \vec{C} - \vec{C_n}$$

$$\Rightarrow \vec{C} = \vec{C_n} + \vec{\tau}$$

Remarque on peut aussi calculer τ de la manière suivante :

$$\vec{\tau} = \vec{n} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{n})$$

Maintenant on se pose la question suivante :

Pour une matrice σ donnée quelles sont les valeurs possible pour C_n et $\tau = \|\vec{\tau}\|$ quelque soit $\vec{n}$?

Existe-t-il des surfaces sur lesquelles il n'y a aucun cisaillement ?

Ceci quelque soit la matrice σ (σ).

$$\Rightarrow \|\vec{\tau}\| = 0 \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\vec{C}}_{\sigma\vec{n}} = \underbrace{\vec{C_n}}_{C_n \vec{n}}$$

Existe-t-il $\vec{n}$ telle que $\sigma \vec{n} = C_n \vec{n}$?

valeurs propres : $A\vec{V_1} = \lambda_1 \vec{V_1}$

Alors $\vec{n}$ sont les vecteurs propres de σ et les C_n associés les valeurs propres.

Les vecteurs propres d'une matrice A (3×3) sont les λ_i tel que

$$\det(A - \lambda_1 \mathbb{I}) = 0 \qquad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

À chaque λ_i on associe le vecteur propre $\vec{V_i}$ tel que $A\vec{V_i} = \lambda_i \vec{V_i}$

→ $\forall \sigma$ $\vec{n}$ et C_n existent (Si un objet est contraint en cisaillement pur, il y aura tjs des éléments qui ne seront pas en cisaillement).

Démarche : A partir de σ, on calcule les vecteurs propres $\det(\sigma - \lambda \mathbb{I}) = 0$, on note ces 3 valeurs propres σ_1, σ_2 et σ_3 ce sont les contraintes principales.

on calcul pour chaque σ_i, le vecteur propre associé $\vec{V_i}$:

$\sigma \vec{V_i} = \sigma V_i$ (on pose $\vec{V_i} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on cherche a, b et c)

$\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ sont les directions principales et correspondent aux orientation de surface sur lesquelles, il n'y a pas de cisaillement.

2) Peut-on trouver les $\vec{n}$ (orientation de surface) sur lesquelles il y a le cisaillement maximum ?

Pour σ donné.

De même peut on trouver les $\vec{n}$ sur lesquelles il y a traction (ou compression) maximum ?

Oui : Cercles de Mohr

On cherche $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ en fonction de C_n et $\|\vec{C}\| = \tau$

* $\|\vec{n}\| = 1$ $\quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$
* $C_n = \vec{C} \cdot \vec{n} = (\sigma \vec{n}) \cdot \vec{n}$ (scalaire)
* $C_n^2 + \tau^2 = \|\vec{C}\|^2 = \vec{C} \cdot \vec{C} = (\sigma \vec{n}) \cdot (\sigma \vec{n})$

Pour résoudre ce système, on se place dans la base des vecteurs propres $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$

Dans cette base.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions $\vec{n} = n_x \vec{V_1} + n_y \vec{V_2} + n_z \vec{V_3}$

$$\Rightarrow \sigma \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_x \\ \sigma_2 n_y \\ \sigma_3 n_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\sigma \vec{n}).\vec{n} = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2 = \sigma_n$$

$$(\sigma \vec{n}).(\sigma \vec{n}) = \sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 = \sigma_n^2 + \tau^2$$

On obtient un système de 3 équations à 3 inconnues n_x^2, n_y^2, n_z^2

$$n_x^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$n_y^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$n_z^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Pour que n_x, n_y et n_z existent, il faut que les 3 membres de droite soient positifs ou nuls.
L'étude du signe, nécessite de classer les contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0$$
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \leq 0$$
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0$$

On cherche le domaine de validité des σ_n, τ vérifiant ces 3 inégalités. (Étude de fonction).

On cherche la courbe d'équation : $\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) = 0$
cette équation peut aussi s'écrire $\tau^2 + \left(\sigma_n - \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 = 0$

(en effet $\tau^2 + \sigma_n^2 + \underbrace{\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2}_{\frac{\sigma_2^2}{4} + \frac{\sigma_3^2}{4} + \frac{\sigma_2\sigma_3}{2}} - \sigma_n(\sigma_2+\sigma_3) - \underbrace{\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2}_{\frac{\sigma_2^2}{4} + \frac{\sigma_3^2}{4} - \frac{\sigma_2\sigma_3}{2}} = 0$

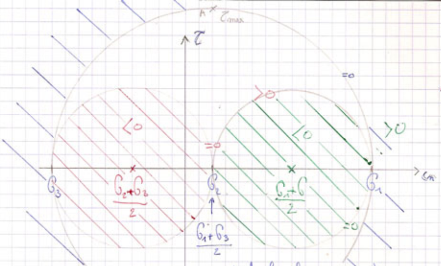
$$\tau^2 + \sigma_n^2 + \sigma_2\sigma_3 - \sigma_n\sigma_2 - \sigma_n\sigma_3 = 0$$

Dans le plan (σ_n, τ) l'équation d'un cercle de centre $\sigma_n^\circ, \tau^\circ$ et de rayon R.

$$(\sigma_n - \sigma_n^\circ)^2 + (\tau - \tau^\circ)^2 = R^2$$

Ici $\tau^2 + \left(\sigma_n - \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)\right) - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 = 0$

est l'équation d'un cercle de centre $\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right)$ et de rayon $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)$



seules les valeurs qui sont à l'extérieur du cercle fonctionnent.

rayon du plus grand cercle.

① $\|\tau\| = \left\|\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right\|$

② $\sigma_3 \leqslant \sigma_n \leqslant \sigma_1$

② Valeur de n associée | Si $\sigma_n = \sigma_1$; $\vec{n} = \vec{V_1}$, vecteur propre associé à σ_1
| Si $\sigma_n = \sigma_3$; $\vec{n} = \vec{V_3}$.

① En ce point où le cisaillement est maximum (A)

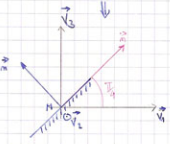
$$\tau = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$
$$\sigma_n = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$$

$\Rightarrow n_1^2 = \frac{1}{2}$

$n_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \vec{n} = \pm \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ou $\pm \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}_{\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3}}$

$n_3^2 = \frac{1}{2}$

$\Downarrow$



Critère de dimensionnement

hypothèse : Matériau est fragile essentiellement en cisaillement

-> constatation expérimentale.

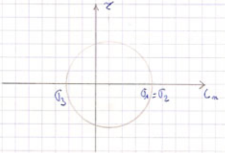
$\Rightarrow \tau_{max} \leqslant \tau_{lim}$: déterminée expérimentalement

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leqslant \tau_{lim}}$$ Critère de Tresca.

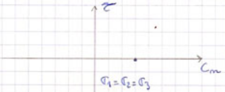
Il s'écrit aussi :

$$\boxed{\mathrm{Sup}\left(\frac{|\sigma_1-\sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2-\sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{2}\right) \leqslant \tau_{lim}}$$

Cas où $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$



Cas où $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

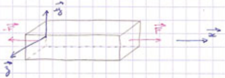


Si on note $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = P$

$$\sigma = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$: pression hydrostatique.

Pour calculer τ_{lim} on a besoin d'un seul essai.

Cet essai est un essai de traction.



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\sigma_{xx} = \frac{F}{S}$

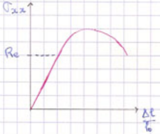
$\sigma_1 = \sigma_{xx}$ $\quad \vec{V_1} = \vec{x}$

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ $\quad \vec{V_2} = \vec{y}, \ \vec{V_3} = \vec{z}$

Tresca $\quad Sup\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}, 0, \frac{\sigma_{xx}}{2}\right) \leqslant \tau_{lim} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{xx}}{2} \leqslant \tau_{lim}$

$\sigma_{xx} \leqslant 2\,\tau_{lim}$

fonctionne que pour les métaux.



exp :

$\sigma_{xx} \leqslant Re$

Si on ne dépasse pas la limite élastique

$\Rightarrow \tau_{lim} = \frac{Re}{2}$

Autres Critère très répandu pour les matériaux métalliques :

Critère de Von Mises

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2\right]^{1/2} \leqslant \tau_{lim}$$

NOTION DE DEFORMATION

. Généralisation de $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ et γ de la RdM.

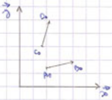
Comment se traduit une déformation.

(traction) . Variation de longueur : un vecteur $\overrightarrow{A_0B_0}$ s'allonge et devient $\overrightarrow{AB}$.

(cisaillement) . Variation d'angle entre 2 vecteurs

Pour traduire ces deux phénomènes on utilise la variation de produit scalaire entre deux vecteurs.

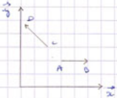
Dans la configuration initiale, on choisit 2 vecteurs $\overrightarrow{A_0B_0}$ et $\overrightarrow{C_0D_0}$, infiniment petit



Dans la configuration déformée :

$\overrightarrow{A_0B_0}$ se transforme en $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{C_0D_0}$ se transforme en $\overrightarrow{CD}$

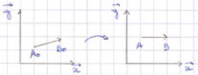


La variation de produit scalaire va s'écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{A_0B_0}\cdot\overrightarrow{C_0D_0}}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B}$

$= \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B} - \overrightarrow{A_0A}$



or $\overrightarrow{B_0B}$ vecteur qui traduit le déplacement de B_0 en B.

$\overrightarrow{B_0B} = \vec{U}(B_0)$: Notation. De même : $\overrightarrow{A_0A} = \vec{U}(A_0)$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_0B_0} + \vec{U}(B_0) - \vec{U}(A_0)}$$ avec $\vec{U}(B_0) = \overrightarrow{B_0B}$

Etude de $\vec{U}(B_0) - \vec{U}(A_0)$

1) Cas particulier : $\overrightarrow{A_0B_0} = \Delta_1 \vec{x}$

Le point A_0 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $\vec{U}(A_0) = U(x,y)$

Le point B_0 ———— $\begin{pmatrix} x+\Delta_1 \\ y \end{pmatrix}$ donc $\vec{U}(B_0) = U(x+\Delta_1, y)$

$$\Rightarrow \vec{U}(B_0) - \vec{U}(A_0) = \vec{U}(x+\Delta_1, y) - \vec{U}(x,y)$$

Dire que $\overrightarrow{A_0B_0}$ est petit $\Rightarrow \boxed{\Delta_1 \ll 1}$

$$\vec{U}(x+\Delta_1, y) = \vec{U}(x,y) + \Delta_1 \frac{d\vec{U}}{dx}(x,y) + \frac{\Delta_1^2}{2}\frac{d^2\vec{U}}{dx^2}(x,y) + \Delta_1^2 \vec{\mathcal{E}}(x,y)$$

Remarque : si $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix}$ $\boxed{\frac{d\vec{U}}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dU_x}{dx} \\ \frac{dU_y}{dx} \end{pmatrix}}$ on s'arrête à l'ordre 1.

$$\boxed{\Rightarrow \vec{U}(x+\Delta_1, y) = \vec{U}(x,y) + \Delta_1 \frac{d\vec{U}}{dx}(x,y)}$$

$$\Rightarrow \vec{U}(x+\Delta_1, y) - \vec{U}(x,y) = \Delta_1 \frac{d\vec{U}}{dx}(x,y)$$

$$\Rightarrow \vec{U}(B_0) - \vec{U}(A_0) = \Delta_1 \frac{d\vec{U}}{dx}(x,y)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_0B_0} + \Delta_1 \frac{d\vec{U}}{dx}(x,y)$$

$$\overrightarrow{AB} = \Delta_1 \vec{x} + \Delta_1 \frac{d\vec{U}}{dx}(x,y)$$

$$\overrightarrow{AB} = \Delta_1 \left(\vec{x} + \frac{d\vec{U}}{dx}\right)$$

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \Delta_1\vec{x} + \Delta_2\vec{y}$$

$$\overrightarrow{AB} = \Delta_1\left(\vec{x} + \frac{d\vec{U}}{dx}\right) + \Delta_2\left(\vec{y} + \frac{d\vec{U}}{dy}\right)$$

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \Delta_1 \vec{x}$$

$$\overrightarrow{AB} = \Delta_1\left(\vec{x} + \frac{d\vec{U}}{dx}\right)$$

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \Delta_2 \vec{y}$$

$$\overrightarrow{AB} = \Delta_2\left(\vec{y} + \frac{d\vec{U}}{dy}\right)$$

Ainsi pour $\overrightarrow{A_0B_0} = \Delta_1\vec{x} + \Delta_2\vec{y} \longrightarrow \overrightarrow{AB} = \Delta_1\left(\vec{x} + \frac{d\vec{U}}{dx}\right) + \Delta_2\left(\vec{y} + \frac{d\vec{U}}{dy}\right)$

et pour $\overrightarrow{C_0D_0} = \delta_1\vec{x} + \delta_2\vec{y} \longrightarrow \overrightarrow{CD} = \delta_1\left(\vec{x} + \frac{d\vec{U}}{dx}\right) + \delta_2\left(\vec{y} + \frac{d\vec{U}}{dy}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \left[\Delta_1\left(\vec{x} + \frac{d\vec{U}}{dx}\right) + \Delta_2\left(\vec{y} + \frac{d\vec{U}}{dy}\right)\right]\cdot\left[\delta_1\left(\vec{x} + \frac{d\vec{U}}{dx}\right) + \delta_2\left(\vec{y} + \frac{d\vec{U}}{dy}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{A_0B_0}\cdot\overrightarrow{C_0D_0} = \Delta_1\delta_1 + \Delta_2\delta_2$$

$$\Delta_1\delta_1\left(\vec{x} + \frac{d\vec{u}}{dx}\right)\cdot\left(\vec{x} + \frac{d\vec{U}}{dx}\right)$$

$$\Delta_2\delta_2\left(\vec{y} + \frac{d\vec{U}}{dy}\right)\cdot\left(\vec{y} + \frac{d\vec{U}}{dy}\right)$$

$$\Delta_1\delta_2\left(\vec{x} + \frac{d\vec{U}}{dx}\right)\cdot\left(\vec{y} + \frac{d\vec{U}}{dy}\right)$$

$$\Delta_2\delta_1\left(\vec{x} + \frac{d\vec{U}}{dx}\right)\cdot\left(\vec{y} + \frac{d\vec{U}}{dy}\right)$$

$$\Delta_1\delta_1\left(\vec{x}+\frac{d\vec{U}}{dx}\right)\cdot\left(\vec{x}+\frac{d\vec{U}}{dx}\right)=\Delta_1\delta_1\left(\vec{x}\cdot\vec{x}+\frac{d\vec{U}}{dx}\cdot\frac{d\vec{U}}{dx}+2\vec{x}\cdot\frac{d\vec{U}}{dx}\right)=\Delta_1\delta_1\left(1+2\frac{dU_x}{dx}+\cancel{\left\|\frac{d\vec{U}}{dx}\right\|^2}\right)$$

hypothèse : petites déformations.

$$\Delta_2\delta_2\left(\vec{y}+\frac{d\vec{U}}{dy}\right)\cdot\left(\vec{y}+\frac{d\vec{U}}{dy}\right)=\Delta_2\delta_2\left(1+2\frac{dU_y}{dy}\right)$$

$$\Delta_1\delta_2\left(\vec{x}+\frac{d\vec{U}}{dx}\right)\cdot\left(\vec{y}+\frac{d\vec{U}}{dy}\right)=\Delta_1\delta_2\left(\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\frac{d\vec{U}}{dy}+\vec{y}\cdot\frac{d\vec{U}}{dx}+\dots\right)=\Delta_1\delta_2\left(\frac{dU_y}{dx}+\frac{dU_x}{dy}\right)$$

$$\Delta_2\delta_1\left(\vec{x}+\frac{d\vec{U}}{dx}\right)\cdot\left(\vec{y}+\frac{d\vec{U}}{dy}\right)=\Delta_2\delta_1\left(\frac{dU_x}{dy}+\frac{dU_y}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{CD}=\Delta_1\delta_1\left(1+2\frac{dU_x}{dx}\right)+\Delta_2\delta_2\left(1+2\frac{dU_y}{dy}\right)+(\Delta_1\delta_2+\Delta_2\delta_1)\left(\frac{dU_x}{dy}+\frac{dU_y}{dx}\right)$$

$$\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{CD}-\vec{A_0B_0}\cdot\vec{C_0D_0}=2\Delta_1\delta_1\frac{dU_x}{dx}+2\Delta_2\delta_2\frac{dU_y}{dy}+(\Delta_1\delta_2+\Delta_2\delta_1)\left(\frac{dU_x}{dy}+\frac{dU_y}{dx}\right)}$$

On note $\varepsilon_{xx}=\dfrac{dU_x}{dx}$ $\qquad \varepsilon=\dfrac{\Delta\ell}{\ell_0}$

$\varepsilon_{yy}=\dfrac{dU_y}{dy}$

$\varepsilon_{xy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dU_x}{dy}+\dfrac{dU_y}{dx}\right)$

$$\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{CD}-\vec{A_0B_0}\cdot\vec{C_0D_0}=$$

$$2\Delta_1\delta_1\varepsilon_{xx}+2\Delta_2\delta_2\varepsilon_{yy}+2(\Delta_1\delta_2+\delta_1\Delta_2)\varepsilon_{xy}$$

$$=$$

$$2\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix}$$

$$=$$

$$2\,\vec{A_0B_0}\cdot\mathcal{E}\,\vec{C_0D_0}$$

$$\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{CD}-\vec{A_0B_0}\cdot\vec{C_0D_0}=2\vec{A_0B_0}\cdot\mathcal{E}\,\vec{C_0D_0} \qquad \mathcal{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{pmatrix}}$$

$\mathcal{E}$: matrice symétrique qui définit les déformations c'est la matrice de déformation

Interprétation de ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy} et mesures

Interprétation de ε_{xx}

$\Delta_1 = \delta_1 \quad \Delta_2 = \delta_2 = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{A_0B_0} = \Delta_1 \vec{x}$

$\overrightarrow{C_0D_0} = \Delta_1 \vec{x}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{A_0B_0}\|^2 = 2\Delta_1^2 \varepsilon_{xx}$

$$\Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{A_0B_0}\|^2}{2\|A_0B_0\|^2}$$

On note :

$$\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)_x = \frac{\|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{A_0B_0}\|}{\|A_0B_0\|} \Leftrightarrow \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|A_0B_0\|} - 1 = \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_x \Leftrightarrow \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|A_0B_0\|} = 1 + \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_x$$

$$\text{Or } \varepsilon_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2}{\|A_0B_0\|^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_x\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_x^2 + 2\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_x - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_x + \cancel{\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)^2}\right) = \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_x$$

hypothèse de petites déformations

Donc ε_{xx} c'est l'allongement relatif dans la direction $\vec{x}$.